# ACADÉMIE DES SCIENCES.

## SÉANCE DU LUNDI 18 SEPTEMBRE 1916.

PRÉSIDENCE DE M. CAMILLE JORDAN.

---

## MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

Après le dépouillement de la Correspondance, M. le **Président** s'exprime en ces termes :

J'ai le triste devoir d'annoncer à l'Académie la mort de notre éminent Confrère M. **Pierre Duhem**, décédé subitement à Cabrespine (Aude), le 14 septembre 1916. C'est une perte cruelle venant s'ajouter à tant d'autres.

M. *Duhem* (*Pierre-Maurice-Marie*) était né à Paris, le 10 juin 1861. Ancien chef de sa promotion à l'École Normale supérieure, Agrégé des Sciences physiques, Docteur ès Sciences mathématiques, il professait depuis de longues années la Physique théorique à l'Université de Bordeaux.

Correspondant depuis longtemps de notre Académie, dans la Section de Mécanique, il fut enfin élu Membre non résident en 1913.

L'œuvre qu'il laisse derrière lui est si vaste qu'il serait impossible d'en donner aujourd'hui une analyse détaillée. Je dois donc me borner à signaler la tendance générale de ses travaux.

On peut la caractériser d'un mot. Il s'est proposé comme but de travailler à la constitution d'une science qui réunisse les principes de la Mécanique avec ceux de la Thermodynamique. Cette science, que l'on pourrait appeler *Thermodynamique générale* ou *Énergétique*, réunirait sous des lois communes l'étude des mouvements locaux des corps ou Mécanique proprement dite, celle de leurs changements d'état physique ou chimique ou Mécanique physique, enfin celle des phénomènes électriques et du magnétisme.

Deux Volumes intéressants formant un *Traité d'Énergétique*, publiés par M. Duhem en 1911, sont consacrés à établir à la fois avec généralité et précision les principes de la nouvelle science. L'auteur y passe en revue : 1° la Statique, qu'il fonde sur l'emploi du théorème de Carnot et sur la notion de transformation réversible qu'il a convenablement précisée; 2° la Dynamique générale, où il complète le principe de d'Alembert en adjoignant aux actions d'inertie invoquées par ce principe les actions de viscosité, fonctions de l'état du système et des vitesses avec lesquelles se modifient ses diverses parties; 3° la Mécanique proprement dite, où il étudie successivement les fluides et les milieux élastiques; 4° la Mécanique chimique, où il reprend et met en lumière l'œuvre de Gibbs, qui avait si admirablement ordonné la théorie des changements d'état physique et chimique. Il reprend la célèbre loi des phases qui a été dans ces derniers temps l'objet de tant de travaux.

Bien d'autres sujets ont été l'objet des études de M. Duhem; l'équilibre et le mouvement des fluides mélangés, ou des corps flottants; l'étude des faux équilibres chimiques; celle des modifications permanentes et de l'hystérésis, de l'électrostatique et du magnétisme, de l'optique, etc.

Tous ces travaux tendent à un même but : créer un système de forme mathématique où se trouvent résumées et classées les lois que l'expérience constate. Aucun d'eux ne cherche à déduire *a priori* les phénomènes naturels d'hypothèses sur la constitution de la matière et de ses mouvements. Il préférait se tenir sur le terrain des faits bien observés. Le désir de suivre l'évolution de ces théories au cours des âges l'a toutefois amené à des études de logique et d'histoire. A deux Volumes sur les Origines de la Statique, à un autre sur l'antique théorie du Mixte a succédé un grand Ouvrage sur l'Histoire des théories astronomiques jusqu'à Copernic. Il devait former 10 Volumes dont la publication, subventionnée par l'Académie, se poursuivait avec une rapidité que la guerre n'avait pas interrompue. Dans les quatre Volumes déjà parus, on ne sait ce qu'on doit le plus admirer, de la vaste érudition de l'auteur ou de son immense labeur. Le rôle glorieux joué par l'Université de Paris pendant le moyen âge y est mis en pleine lumière.

Je lève la séance en signe de deuil.

MINÉRALOGIE. — *Les syénites à riebeckite d'Alter Pedroso (Portugal), leurs formes mésocrates (lusitanites) et leur transformation en leptynites et en gneiss.* Note ([1]) de M. **A. Lacroix**.

Mes recherches sur les syénites et les granites à riebeckite de Madagascar m'ont amené à les comparer avec les roches analogues des divers gisements où elles sont connues, et c'est ainsi que j'ai été conduit à m'occuper de la petite région portugaise dont les roches, remarquables à divers points de vue, font l'objet de cette Note.

La Carte géologique du Portugal ([2]) porte, dans la province d'Alemtejo, un massif de gabbro [diorite] qui se développe au milieu du Cambrien, au sud-est d'Alter do Chão. En réalité, la constitution de ce massif n'est pas aussi simple; en effet, dans sa partie nord, autour d'Alter Pedroso, il est traversé par une masse grossièrement circulaire de $2^{km}$ de diamètre formée par des roches syénitiques, très nettement postérieures, qui en renferment des lambeaux; l'exploration complète de ce district reste à faire, elle est rendue difficile par sa nature boisée.

Deux Notes ont été publiées sur les roches qui m'occupent; en 1902, M. V. de Sousa Brandão a décrit ([3]) un échantillon faisant partie de la collection du Service géologique du Portugal et l'a considéré comme une granulite (au sens allemand) alcaline à riebeckite et ægyrine à structure cataclastique; il l'a comparée au gneiss alcalin connu plus à l'Est, à Cevadaes, près Campo Maior. Peu après, le même savant a décrit ([4]) les propriétés du zircon et surtout de la riebeckite se trouvant en très gros cristaux dans une pegmatite de la même localité.

Je dois la riche collection que j'ai étudiée à mes collègues de la Faculté des Sciences de Lisbonne. Elle consiste en roches très variées d'aspect, mais présentant toutes la commune particularité d'être constituées par les mêmes minéraux : microcline et albite (avec parfois un peu de quartz) pour les éléments blancs, riebeckite dominante et ægyrine pour les éléments colorés; un peu de zircon, de biotite, d'apatite, de fluorine (dans la pegma-

---

([1]) Séance du 4 septembre 1916.

([2]) *Carte géologique du Portugal*, par Delgado et Choffat. Lisbonne, 1899.

([3]) *Neues Jahrb. f. Miner. Centralbl.*, 1902, p. 49.

([4]) *Sur un gisement remarquable de riebeckite et le zircon qui l'accompagne.* Lisbonne, 1903.

tite) peuvent compliquer cette composition. Les deux principaux groupes de minéraux varient dans des proportions considérables. Il existe des types hololeucocrates, renfermant moins de 5 pour 100 d'éléments colorés; la plus grande partie n'en contient que de 10 à 15 pour 100, parfois il en existe un peu plus; enfin, il faut signaler des types mésocrates dans lesquels la teneur en riebeckite et ægyrine oscille entre 50 et 60 pour 100. Les syénites sont à grain moyen ou à grain fin, mais les pegmatites, généralement très riches en riebeckite, sont à énormes éléments; leurs cristaux d'amphibole peuvent dépasser $40^{cm}$ de longueur; comme ceux des granites alcalins de Madagascar, ils sont souvent implantés d'une façon régulière, perpendiculairement aux parois des masses lenticulaires constituées par cette pegmatite.

Ces syénites ne sont pas seulement intéressantes par leur composition minéralogique; elles présentent aussi des particularités structurelles remarquables; aucune de celles qui possèdent une structure primaire reconnaissable n'est dépourvue de traces d'actions mécaniques : torsion des feldspaths, friction sur leurs bords et le long des fentes qui les ont morcelés en petits fragments plus ou moins déviés de leur position originelle. La structure cataclastique est généralement accompagnée de recristallisation des mêmes minéraux avec structure granoblastique et c'est ainsi que, de proche en proche, les roches à grain moyen et à gros éléments se transforment en types à grain fin : les variétés hololeucocrates et leucocrates prennent alors un aspect saccharoïde, blanc de lait ou rosé tacheté de noir bleu ou de vert. La pegmatite [1] est parsemée de veinules ou de taches possédant cette même texture et ayant la même origine. Peu à peu, et souvent sans que l'aspect extérieur ait changé, la totalité des minéraux écrasés a recristallisé sous forme de petits grains : les feldspaths se distinguent alors des mêmes minéraux originels en ce que l'albite n'est pas maclée ou présente des macles larges et peu nombreuses au lieu de macles fines et répétées; l'orthose semble associée au microcline, il n'y a plus de microperthite. Quant aux minéraux colorés, ils présentent les mêmes caractères que dans la syénite normale; seulement les débris des grands cristaux de riebeckite sont parfois entourés et traversés par de petits grains d'ægyrine et de magnétite; c'est une confirmation de ce fait, si frappant dans les gra-

---

[1] Les feldspaths de cette pegmatite syénitique constituent localement à l'état normal ces associations flabelliformes, qui sont si fréquentes dans l'albite des pegmatites du Limousin et dans les microperthites d'albite et de microcline des pegmatites très feldspathiques des syénites néphéliniques de l'île de Rouma (archipel de Los).

nites alcalins de Madagascar, qu'à l'inverse de ce qui se passe pour les pyroxènes et amphiboles calco-magnésiens, dans la série des pyroxènes et amphiboles sodiques, c'est le pyroxène qui est la forme stable dans les roches transformées.

Enfin, très fréquemment, dans les roches modifiées ou en voie de transformation, l'ægyrine, au lieu d'être disséminée régulièrement, forme des cristaux à faces prismatiques nettes, très allongés suivant l'axe vertical, pouvant mesurer plus de $1^{cm}$ et possédant une couleur vert pâle parce qu'ils enveloppent pœcilitiquement un nombre considérable de grains de feldspaths. Ils sont certainement de formation postérieure aux actions mécaniques, car leur forme n'est jamais altérée.

Ces roches à grain fin, entièrement recristallisées, doivent être appelées des *leptynites syénitiques* quand elles sont très pauvres en minéraux colorés, ou des *gneiss syénitiques à riebeckite* dans le cas contraire; ces éléments colorés sont souvent alignés, déterminant ainsi, même à l'œil nu, une texture gneissique des plus nette qui contraste avec la texture syénitique des roches originelles. A égalité de teneur en riebeckite, les types gneissiques sont plus foncés que les syénitiques, par suite de la répartition plus égale de l'amphibole d'un noir bleuâtre.

Ces roches d'Alter Pedroso offrent l'un des plus remarquables exemples qu'on puisse trouver de la transformation progressive d'une roche éruptive en un schiste cristallin par recristallisation et par l'intermédiaire de types à structure cataclastique. J'ai pu suivre ce même phénomène à Madagascar dans toutes ses étapes [1] et aux dépens de divers types pétrographiques; les nombreux stades intermédiaires constatés permettent de démontrer, comme à Alter Pedroso, que les gneiss à structure granulitique (granoblastique) qui constituent une partie très importante de l'île ne sont autre chose que des granites déformés mécaniquement, puis entièrement recristallisés, *sans changement de composition chimique*.

Les analyses suivantes donnent la composition de ces différentes roches, ordonnées par quantité croissante d'éléments colorés; elles ont été faites par M. Raoult :

---

[1] L'intérêt de Madagascar à ce point de vue réside dans ce qu'il y existe des régions (notamment sur le bord du Bongo Lava) où le phénomène cataclastique existe seul, d'autres où l'on peut suivre les recristallisations progressives; d'autres enfin (région de Tananarive) où il n'existe généralement plus trace de la structure originelle ni de phénomènes cataclastiques.

*a*, type hololeucocrate, I.5.1.4; *b*, type hololeucocrate avec cristaux de riebeckite clairsemés et quelques grands cristaux d'ægyrine, I'.5.1'.4; *c*, type très déformé mécaniquement, finement grenu, assez riche en riebeckite, I(II).5.1.4; *d*. type mésocrate à gros grains, facies syénitique, III.5.1.4; *e*, type mésocrate à grain fin, III.5(6).1.4.

| | *a.* | *b.* | *c.* | *d.* | *e.* |
|---|---|---|---|---|---|
| $SiO^2$ | 65,84 | 64,06 | 63,46 | 56,94 | 55,60 |
| $Al^2O^3$ | 18,35 | 17,57 | 16,95 | 11,12 | 10,56 |
| $Fe^2O^3$ | 1,29 | 2,71 | 3,61 | 7,93 | 7,53 |
| FeO | 1,31 | 3,24 | 3,98 | 11,51 | 13,91 |
| MgO | 0,18 | 0,11 | 0,07 | 0,08 | 0,41 |
| CaO | 0,54 | 0,84 | 0,80 | 1,80 | 1,06 |
| $Na^2O$ | 8,39 | 7,06 | 7,34 | 6,35 | 7,23 |
| $K^2O$ | 3,79 | 4,21 | 3,54 | 2,85 | 2,86 |
| $TiO^2$ | 0,07 | traces | traces | traces | 0,46 |
| $P^2O^5$ | 0,08 | 0,06 | 0,06 | 0,23 | traces |
| $H^2O$ à 105° | traces | 0,04 | 0,06 | 0,14 | 0,12 |
| » au rouge | 0,32 | 0,35 | 0,19 | 0,98 | 0,24 |
| | 100,19 | 100,25 | 100,06 | 99,93 | 99,98 |

Cette série est remarquablement homogène; la haute teneur en alcalis, avec prédominance de la soude, subit de faibles variations; la teneur en chaux et en magnésie est extrêmement faible. Par contre, le fer croît rapidement en même temps que décroissent la silice (¹) et l'alumine. La roche *a* est une aplite syénitique, sa composition chimique correspond à celle de la *lestiwarite* de Norvège; les types *b* et *c* peuvent être comparés, au point de vue chimique, à des *sölvsbergites* particulièrement pauvres en chaux et en magnésie; mais les termes les plus remarquables sont les mésocrates. Dans les magmas syénitiques actuellement connus, toutes les fois qu'une différenciation basique a déterminé la production d'une grande quantité de minéraux colorés, ceux-ci sont plus ou moins calco-magnésiens; la chaux et la magnésie croissent en même temps que le fer, il en résulte que les syénites mésocrates ou mélanocrates, telles que les shonkinites, renferment toujours des amphiboles et des pyroxènes calco-magnésiens pouvant comporter une proportion notable d'anorthite potentielle. Rien de semblable n'a lieu dans nos roches, qui constituent le premier exemple de syénites à riebeckite et ægyrine mésocrates. C'est pour cette raison qu'il est nécessaire de les

(¹) Les roches *a* à *d* renferment de 2 à 4 pour 100 de quartz; *e*, 5 pour 100 de néphéline virtuelle.

désigner sous un nom spécial et je propose celui de *lusitanite* pour rappeler leur pays d'origine. Ce type vient aussi combler un vide dans la classification chimico-minéralogique (III.5.1.4 = lusitanose).

Il y aurait intérêt à fouiller la région où l'on trouverait peut-être des types encore plus riches en amphiboles sodiques, des amphibolites à riebeckite, roches qui ne sont pas encore connues.

Les roches auxquelles on pourrait comparer les lusitanites dans les familles voisines sont pour celles à excès de silice, les granites à ægyrine et riebeckite de Madagascar que j'ai décrits antérieurement, et en particulier les fasibitikites, bien que celles-ci, moins riches en minéraux colorés, contiennent un peu plus de chaux, et aussi la rockallite dans la série purement ægyrinique ([1]).

Dans la famille des syénites néphéliniques, deux roches pourraient être aussi parallélisées avec la nôtre. M. Törnebohm a étudié ([2]) dans les syénites à catapléite de Lakarp, en Suède, des nodules mésocrates riches en ægyrine et en une amphibole alcaline spéciale; il a nommé cette roche *lakarpite*. D'autre part, M. Ussing a décrit récemment ([3]) sous le nom de *kakortokite* une roche rubanée de Kringlerne près du Kangerdluarsuk Fjord (Groenland) formée de couches alternativement répétées blanches, riches en feldspaths et en néphéline, ou roses, riches en eudialyte et en néphéline et enfin de couches noires dans lesquelles abondent l'arfvedsonite et l'ægyrine. La composition de ces lits foncés ([4]) se rapproche de celle des lusitanites, mais avec une teneur moindre en silice qui entraîne la production d'une importante proportion de néphéline : il existe aussi de l'eudialyte.

En résumé, le gisement d'Alter Pedroso présente une constitution des plus remarquables; il est incontestable que les diverses roches qui s'y rencontrent sont le résultat de différenciations effectuées sur un plan simple dans un magma alcalin : il reste à déterminer si elles constituent des faciès de variation d'une même masse intrusive ou si elles ont été mises en place par des intrusions successives.

---

([1]) Dans ces diverses roches, la prédominance de l'ægyrine sur la riebeckite ou le remplacement complet de celle-ci par l'ægyrine sont une conséquence de l'état d'oxydation du fer qui est surtout à l'état de $Fe^2O^3$ (dans les roches à riebeckite le FeO domine sur le $Fe^2O^3$) et aussi d'une teneur moindre en alumine.

([2]) *Sveriges geol. Urdersökning*, sér. C, n° 199. Stockholm, 1906.

([3]) *Meddelelser om Grönland* (Kjobenhaven), t. 38, 1912, p. 177.

([4]) $SiO^2$, 48,90; $Al^2O^3$, 7,85; $Fe^2O^3$, 11,46; FeO, 13,32; MgO, 0,38; CaO, 1,95; $Na^2O$, 7,40; $K^2O$, 3,23; $H^2O$, 1,80; MnO, 1,11; $ZrO^2$, 1,96; MnO, 1,11; Cl, 0,03; Total : 99,39.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur certains sous-groupes des groupes hyperfuchsiens correspondant aux formes quadratiques ternaires à indéterminées conjuguées.* Note de M. **Émile Picard**.

1. J'ai donné autrefois [1] les premiers exemples de groupes hyperfuchsiens en envisageant les substitutions à coefficients entiers complexes transformant en elle-même une forme quadratique ternaire d'Hermite. Si cette forme est à coefficients réels, et si l'on considère seulement les substitutions à coefficients réels, on a un sous-groupe du groupe hyperfuchsien; ce sous-groupe offre quelques particularités intéressantes que je me propose d'indiquer. Il suffit, pour plus de simplicité, d'envisager seulement ici la forme à indéterminées conjuguées

$$(1) \qquad xx_0 + yy_0 - zz_0 \qquad (x_0, y_0, z_0 \text{ conjuguées de } x, y, z).$$

Nous désignerons d'une manière générale par

$$(x, y, z;\ M_1 x + N_1 y + P_1 z,\ M_2 x + N_2 y + P_2 z,\ M_3 x + N_3 y + P_3 z)$$

les substitutions à coefficients entiers réels transformant en elle-même la forme (1) et par suite aussi la forme

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - z^2.$$

2. Nous voulons étudier, au point de vue de la discontinuité, le groupe relatif aux deux variables complexes $u$ et $v$

$$(3) \qquad U = \frac{M_1 u + P_1 v + R_1}{M_3 u + P_3 v + R_3}, \qquad V = \frac{M_2 u + P_2 v + R_2}{M_3 u + P_3 v + R_3}.$$

J'ai montré (*loc. cit.*) que le groupe hyperfuchsien *général* résultant de (1), c'est-à-dire avec les M, P, R entiers complexes, est discontinu à l'intérieur de l'hypersphère

$$(\Sigma) \qquad uu_0 + vv_0 = 1.$$

Pour éviter toute confusion, rappelons que nous disons qu'un groupe est discontinu en un *point* $(u, v)$, quand il n'existe pas de substitution du groupe, transformant le point $(u, v)$ en un point $(U, V)$ différant du premier d'aussi peu que l'on veut, exception faite pour un nombre limité de substitutions qui transformeraient $(u, v)$ en lui-même.

---

[1] *Comptes rendus*, 1882, et *Acta mathematica*, t. I.

Nous supposerons le point complexe $(u, v)$ à distance finie; nous poserons

$$u = u_1 + i u_2, \qquad v = v_1 + i v_2,$$

et nous emploierons des notations analogues pour U et V.

Examinons d'abord le cas où l'on aurait

$$u_1^2 + v_1^2 < 1.$$

Nous pouvons alors raisonner comme dans le cas du groupe hyperfuchsien. En se rappelant la relation

$$M_3^2 + P_3^2 - R_3^2 = -1,$$

on obtient aisément l'inégalité

$$(4) \qquad |M_3 u + P_3 v + R_3| > |R_3| \frac{1 - u_1^2 - v_1^2}{2}.$$

D'autre part, il résulte des relations entre les M, P, R qu'il n'y a qu'un nombre *limité* de substitutions du groupe correspondant à une valeur de $R_3$. Écrivons alors les relations immédiates

$$(5) \qquad \begin{cases} 1 - U^2 - V^2 = \dfrac{1}{(M_3 u + P_3 v + R_3)^2}(1 - u^2 - v^2), \\ 1 - UU_0 - VV_0 = \dfrac{1}{|M_3 u + P_3 v + R_3|^2}(1 - uu_0 - vv_0). \end{cases}$$

De l'inégalité (4) on conclut que les dénominateurs des égalités précédentes augmentent indéfiniment, quand on prend des substitutions du groupe où $R_3$ grandit indéfiniment. Les deux expressions

$$1 - U_1^2 - V_1^2 + U_2^2 + V_2^2 \quad \text{et} \quad 1 - U_1^2 - V_1^2 - U_2^2 - V_2^2$$

tendent donc vers zéro. Le point (U, V) se rapproche, par suite, indéfiniment de la *courbe*

$$(\text{C}) \qquad U_2 = V_2 = 0, \qquad U_1^2 + V_1^2 = 1.$$

Nous pouvons conclure que le groupe est *certainement discontinu* dans le domaine (D), relatif aux deux variables complexes $u$ et $v$, défini par l'inégalité

$$(\text{D}) \qquad u_1^2 + v_1^2 < 1.$$

*De plus, les points limites sont sur la* COURBE (C).

3. Si le point $(u, v)$ n'est pas dans le domaine (D), le raisonnement précédent n'est plus applicable, l'inégalité (4) perdant tout intérêt. Nous allons chercher ce qui arrive quand $(u, v)$ est en dehors de (D). On supposera, dans tout ce qui va suivre, que $u_2$ et $v_2$ *ne sont pas nuls à la fois.*

Montrons d'abord que si l'on a

$$u_2^2 + v_2^2 - (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \neq 0, \tag{6}$$

le groupe est discontinu en $(u, v)$. Je dis en effet que, dans ce cas, il ne peut y avoir qu'un nombre limité de substitutions pour lesquelles

$$|M_3 u + P_3 v + R_3|$$

soit inférieur à un nombre donné. Écrivons, en effet,

$$\left\{\begin{array}{l} M_3 u_1 + P_3 v_1 + R_3 = \alpha, \\ M_3 u_2 + P_3 v_2 = \beta, \end{array}\right. \tag{7}$$

$|\alpha|$ et $|\beta|$ étant inférieurs à un nombre donné. On tire de là les valeurs de $M_3$ et $P_3$, qu'on porte dans la relation existant entre $M_3$, $P_3$ et $R_3$,

$$M_3^2 + P_3^2 - R_3^2 = -1.$$

On obtient ainsi une équation du second degré en $R_3$, dans laquelle le coefficient de $R_3^2$ est précisément l'expression (6). Il en résulte que $|R_3|$ est limité, quand $\alpha$ et $\beta$ le sont eux-mêmes; il n'y a donc qu'un nombre limité de substitutions remplissant la condition indiquée.

Nous avons supposé implicitement que $u_1 v_2 - u_2 v_1$ n'était pas nul. Mais, s'il en était autrement, la conclusion subsisterait, car des équations (7) on tirerait la limitation de $R_3$.

Nous pouvons maintenant montrer que, sous la condition (6), *le groupe est discontinu en* $(u, v)$. Si en effet il en était autrement, il y aurait, contrairement à ce que nous venons de voir, une infinité de substitutions du groupe pour lesquelles

$$|M_3 u + P_3 v + R_3|$$

serait infiniment voisin de l'unité; c'est ce qui résulte de la seconde des équations (5), car nous pouvons écarter le cas où l'on aurait

$$1 - u u_0 - v v_0 = 0,$$

ce qui nous ramènerait au cas déjà traité $1 - u_1^2 - v_1^2 > 0$.

Cherchons, toujours sous la condition (6), ce qu'il arrive des points-

limites. Remarquons que l'expression

$$(8) \qquad \frac{M_3}{R_3}u + \frac{P_3}{R_3}v + 1$$

a, pour toute substitution du groupe, son module supérieur à un nombre déterminé (dépendant de $u$ et $v$), sauf peut-être pour un nombre limité de substitutions. Posons en effet

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{M_3}{R_3}u_1 + \dfrac{P_3}{R_3}v_1 + 1 = a, \\ \dfrac{M_3}{R_3}u_2 + \dfrac{P_3}{R_3}v_2 = b. \end{cases}$$

On tire de là les valeurs de $\frac{M_3}{R_3}$ et de $\frac{P_3}{R_3}$, et on les porte dans la relation

$$\frac{M_3^2}{R_3^2} + \frac{P_3^2}{R_3^2} = 1 - \frac{1}{R_3^2}.$$

On trouve ainsi une valeur de $R_3^2$ qui, pour $a = b = 0$, a une valeur finie. Il pourra arriver que la valeur ainsi obtenue de $R_3^2$ soit le carré d'un entier et corresponde à certaines substitutions du groupe en nombre limité, mais il est clair que, pour toutes les autres, la valeur de $R_3^2$ ne pourra être un entier que si $a^2 + b^2$ est supérieur à un nombre déterminé différent de zéro; ce qui démontre la remarque énoncée.

Il a été supposé dans ce dernier calcul que $u_1 v_2 - u_2 v_1$ n'était pas nul. S'il en était autrement, on tirerait des équations (9)

$$v_2 = av_2 - bv_1, \qquad u_2 = au_2 - bu_1$$

et comme $u_2^2 + v_2^2$ n'est pas nul, il n'est pas possible que $a^2 + b^2$ descende au-dessous d'une certaine limite.

La remarque relative à la limite inférieure de l'expression (8) nous permet d'énoncer la même conclusion qu'au paragraphe 2, en ce qui concerne les points limites. Il existe en effet ici, comme précédemment, un nombre positif K non nul, tel que (sauf peut-être pour un nombre limité de substitutions) on a

$$|M_3 u + P_3 v + R_3| > K|R_3|.$$

De là se conclut, comme plus haut, que *l'ensemble des points limites est sur la courbe* (C).

4. Examinons enfin le cas laissé jusqu'ici de côté où, pour le point $(u, v)$,

on aurait

$$u_2^2 + v_2^2 - (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 = 0,$$

en supposant toujours $u_2^2 + v_2^2$ différent de zéro.

On voit d'abord qu'on n'a pas ici

$$1 - u^2 - v^2 = 0,$$

car cette égalité est incompatible avec les conditions précédentes. On prouvera alors, d'après la première des équations (5), la discontinuité du groupe, si l'on montre qu'il ne peut y avoir une infinité de substitutions du groupe, pour lesquelles

$$M_3 u + P_3 v + R_3$$

diffère de $\pm 1$ d'aussi peu qu'on veut. Or, écrivons les équations

$$\begin{aligned} M_3 u_1 + P_3 v_1 + R_3 &= \pm 1 + \varepsilon, \\ M_3 u_2 + P_3 v_2 \phantom{+ R_3} &= \eta, \end{aligned}$$

et faisons, comme plus haut, la substitution de $M_3$ et $P_3$ dans la relation déjà écrite entre $M_3$, $P_3$ et $R_3$. Nous aurons ici une équation du premier degré en $R_3$, donnant pour $R_3$ la valeur finie $\pm 1$ quand on fait $\varepsilon = \eta = 0$. Il n'y a plus alors qu'à raisonner comme ci-dessus.

On ne peut d'ailleurs, dans le cas présent, avoir

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0.$$

5. Nous pouvons, comme conclusion de l'analyse précédente, énoncer la proposition suivante :

*Le groupe étudié est discontinu pour tout point* $(u, v)$ *non réel* $(u_2^2 + v_2^2 \neq 0)$, *situé à distance finie. Il est aussi discontinu pour les points réels* $u = u_1$, $v = v_1$, *pourvu qu'on ait*

$$u_1^2 + v_1^2 < 1.$$

Une différence importante est à noter en ce qui concerne les points limites. Quand l'expression

$$u_2^2 + v_2^2 - (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2$$

n'est pas nulle, *l'ensemble des points limites est sur la courbe* (C) *définie par les équations*

$$U_2 = 0, \qquad V_2 = 0, \qquad U_1^2 + V_1^2 = 1.$$

Si, au contraire, l'expression précédente est nulle, $u_2^2 + v_2^2$ étant d'ail-

leurs toujours différent de zéro, on peut seulement affirmer que les points limites *à distance finie* sont nécessairement sur le continuum défini par les deux équations

$$U_2 = 0, \quad V_2 = 0.$$

J'étudierai prochainement les fonctions uniformes de $u$ et $v$, restant invariables par les substitutions du groupe précédent.

## CORRESPONDANCE.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur le principe de Doppler et le sifflement des projectiles.* Note [1] de M. **Ernest Esclangon**, présentée par M. Paul Appell.

Le principe de Doppler a été souvent vérifié expérimentalement pour des vitesses relativement faibles, de l'ordre du $\frac{1}{10}$ de la vitesse du son par exemple. On peut se demander ce que devient cette loi pour des vitesses très grandes, de l'ordre de celle du son, réalisées notamment par les projectiles.

Nous nous proposons de montrer que, dans ce cas, le *timbre* peut être affecté, ce qui peut expliquer la variété et la transformation des sons émis dans le sifflement des projectiles.

Soient P un observateur *fixe* et un projectile, ou un corps sonore quelconque, décrivant une trajectoire. Désignons par $v$ la vitesse en un point quelconque M, par $a$ celle du son, par $\psi$ l'angle de $\overline{MP}$ avec la tangente positive en M, par $r$ la distance MP, enfin par $\theta$ l'époque où le projectile passe en M.

Le projectile ébranle successivement les molécules qu'il rencontre sur son passage, et qui reviennent à leur position d'équilibre après un temps très petit $\varepsilon$. En outre, le corps mobile étant supposé animé d'un mouvement périodique, autour de sa trajectoire (rotation, précession, son s'il s'agit d'un corps sonore), les molécules ébranlées aux époques $\theta$, $\theta + T$, $\theta + 2T$, ... ont les mêmes mouvements. Le mouvement d'une molécule ébranlée à l'époque $\theta$ pourra donc être représenté par $f(t, \theta)$; $f$ désignant

[1] Séance du 11 septembre 1916.

une fonction périodique *par rapport à* $\theta$, en supposant que $\theta$ est l'origine des temps $t$. Si l'on prend pour $t$ une origine quelconque, le mouvement transmis au point P, à l'époque $t$, sera représenté par $\frac{1}{r} f\left(t - \theta - \frac{r}{a}, \theta\right)$.

Composons tous les mouvements qui, issus des divers points de la trajectoire, arrivent en P à l'époque donnée $t$. Le mouvement de chaque molécule étant amorti, les seuls points de la trajectoire à considérer seront ceux pour lesquels

$$(1) \qquad t \geqq \theta + \frac{r}{a} \geqq t - \varepsilon,$$

c'est-à-dire situés sur un (ou plusieurs) petits arcs tels que $A_1 A_2$ dont les extrémités correspondent aux limites de l'inégalité (1). Le mouvement composant en P sera donné par

$$(2) \qquad I = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{r} f\left(t - \theta - \frac{r}{a}, \theta\right) ds.$$

Confondant l'arc $A_1 A_2$ avec un segment de droite et $\psi$ désignant l'angle de $M_1 P$ avec la tangente positive à la trajectoire, on aura

$$(3) \qquad s_2 - s_1 = l = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{1}{v} - \frac{\cos\psi}{a}\right)}, \qquad \theta_1 + \frac{r_1}{a} = t, \qquad r = r_1 - \lambda \cos\psi; \qquad \theta = \theta_1 + \frac{\lambda}{v},$$

et, par suite,

$$(4) \qquad I(t) = \int_0^l \frac{1}{r} f\left(\frac{\lambda\varepsilon}{l}, \theta_1 + \frac{\lambda}{v}\right) d\lambda;$$

$t$ figure au second membre par l'intermédiaire de $\theta_1$ et de $r$ donnés par (3).

Au voisinage de l'époque $t$ on peut écrire

$$\theta_1 = \frac{t}{\left(1 - \frac{v}{a}\cos\psi\right)} + \text{const.}$$

De sorte que, finalement, l'intégrale (4) s'écrit

$$I(t) = \int_0^l \frac{\Phi(\lambda, t)}{R(\lambda, t)} d\lambda, \qquad R(\lambda, t) = r.$$

Or, d'après la propriété de la fonction $f$, la fonction $\Phi(\lambda, t)$ *est périodique* par rapport à $t$ et sa période $T' = T\left(1 - \frac{v}{a}\cos\psi\right)$ est celle qui résulte du principe de Doppler; mais $I(t)$ n'est vraiment elle-même une fonction

périodique que si, au voisinage de l'époque $t$, les valeurs correspondantes de $r$ peuvent être considérées comme constantes, c'est-à-dire si l'observateur est éloigné de l'arc $A_1 A_2$, ou si le mouvement du corps sonore est peu rapide, ou enfin si la période T est très petite.

S'il n'en est pas ainsi, ce qui peut arriver pour les projectiles, on pourra toujours écrire

$$\frac{1}{R(\lambda, t)} = S_0(\lambda) + tS_1(\lambda) + t^2 S_2(\lambda) + \ldots,$$

et, par suite,

$$I(t) = \varphi_0(t) + t\,\varphi_1(t) + t^2\,\varphi_2(t) + \ldots;$$

les fonctions $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... étant des fonctions périodiques de période $T'$.

Si on les développe en séries de Fourier, on aura finalement

$$I(t) = \sum \left( A_n \cos 2\pi \frac{nt}{T'} + B_n \sin 2\pi \frac{nt}{T'} \right),$$

$A_n$ et $B_n$ étant des fonctions de $t$ plus ou moins lentement variables.

En d'autres termes, *dans le son perçu, la période sera bien celle déduite du principe de Doppler*, mais *le timbre pourra varier* plus ou moins rapidement en fonction du temps. Or c'est bien en fait ce que l'on observe avec les projectiles, surtout lorsqu'ils passent près de l'observateur, c'est-à-dire lorsque $r$ varie rapidement.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Action des rayons X sur l'iode et l'iodure d'amidon en milieu aqueux.* Note (¹) de M. H. **Bordier**, transmise par M. Armand Gautier.

Dans un précédent travail (²), j'ai fait connaître l'action qu'exerce la lumière sur l'iode et l'iodure d'amidon en milieu aqueux.

L'explication que j'ai donnée de cette action de la lumière par ionisation et précipitation des grains colloïdaux m'a conduit à étudier l'action des rayons X sur ces pseudo-solutions. On sait, en effet, que les rayons X produisent surtout des phénomènes d'ionisation.

Quelques précautions sont nécessaires pour ces expériences : il faut tout d'abord se placer dans des conditions telles que le phénomène à observer ne soit pas masqué

---

(¹) Séance du 11 septembre 1916.

(²) *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 205.

par une trop forte concentration. Pour l'eau iodée, on opère en mettant 4 gouttes de teinture d'iode au dixième dans $1^l$ d'eau, et en agitant après chaque goutte. Si l'on s'est servi d'un compte-gouttes normal, la proportion d'iode employée ainsi est de $0^g,0072$ par litre. Pour l'iodure d'amidon, on verse un excès d'empois d'amidon dans $1^l$ d'eau et l'on y laisse tomber 4 gouttes de teinture d'iode qui communiquent au liquide une jolie teinte bleu de ciel.

Après de nombreux essais et tâtonnements, le dispositif que j'ai trouvé le plus commode pour faire les irradiations consiste à placer le liquide dans une boîte en carton préalablement paraffinée : cette boîte est ainsi rendue étanche et le couvercle établit une fermeture hermétique; il sert en même temps de filtre aux rayons tout en s'opposant aux phénomènes d'oxydation qui pourraient provenir de l'ozone formé autour de l'ampoule.

Pour apprécier la quantité de rayons X absorbée par le liquide irradié, je collais une pastille de mon chromoradiomètre au couvercle, le platinocyanure étant tourné vers le haut.

J'ai opéré avec des ampoules de différentes dimensions à anticathode refroidie par l'eau, avec une dureté mesurée par 7 à 8 degrés Benoist. De cette façon, le liquide s'échauffe à peine, 1° ou 2° tout au plus.

*Résultats.* — Avec l'iodure d'amidon, l'action des rayons X se reconnaît facilement par la décoloration : la quantité de rayons X nécessaire pour produire cette décoloration a varié dans mes expériences entre 8 et 10 unités I. Il faut noter que, si la dose des rayons a été insuffisante, la décoloration de l'iodure d'amidon n'est pas complète aussitôt après l'irradiation. Mais en abandonnant à elle-même la solution irradiée, sa décoloration ne tarde pas à devenir totale, même dans l'obscurité. Après la décoloration produite par les rayons X, on peut faire réapparaître la teinte bleue en ajoutant une trace d'iode dans la liqueur.

Avec l'eau iodée, l'action des rayons X s'apprécie en ajoutant à cette eau, après une irradiation suffisante, quelques gouttes d'empois d'amidon : alors que l'eau iodée témoin donne dans ces conditions une belle couleur bleue, l'eau irradiée reste incolore. La dose nécessaire pour obtenir ce résultat est aussi d'environ 8 à 10 unités I. Comme je l'ai constaté, cette dose varie avec la proportion d'iode : peut-être y aurait-il dans cette remarque un moyen de quantitométrie radiothérapique.

Ce que les rayons ultraviolets produisent après plusieurs heures, les rayons X le font en quelques minutes : les uns et les autres font cesser l'état colloïdal de l'iode en déchargeant les particules électrisées. Celles-ci avant l'irradiation restaient en présence des éléments de l'eau sans entrer en

combinaison avec eux, puisque dans l'obscurité l'iode conserve son même état : à mesure que l'ionisation due aux rayons X ou aux rayons ultra-violets produit son effet, les particules d'iode libérées entrent en combinaison avec l'hydrogène de l'eau pour former de l'acide iodhydrique qui n'a plus d'action sur l'empois d'amidon : d'où disparition de la teinte bleue en présence de l'amidon. Du reste, la réaction de l'eau iodée et de l'iodure d'amidon devient nettement acide après une irradiation suffisante.

MINÉRALOGIE. — *Les minettes de Jersey*. Note (¹) de M. MAUGER.

L'une des caractéristiques de la constitution pétrographique de Jersey réside dans l'abondance des filons de minette (*mica trap*) qui traversent le granite, les microgranites et aussi les schistes paléozoïques et les porphyrites.

J'ai eu l'occasion d'étudier un assez grand nombre de ces filons, je me propose de donner la description des roches qui les constituent.

Leur structure varie de la grenue à la microlitique. Toutes sont caractérisées par leur couleur noire et l'abondance de la biotite. Cette biotite se présente en lamelles hexagonales avec des formes très nettes, s'empilant parfois les unes sur les autres pour constituer d'élégants groupements; en lames minces, on constate que généralement la coloration est plus intense sur la périphérie des cristaux, qui sont toujours sensiblement uniaxes. Ce mica est souvent associé à de l'augite, quelquefois un peu violacée et présentant très fréquemment une décomposition en calcite; c'est là l'origine de la calcite que ces roches renferment parfois en grande abondance; il existe aussi parfois des transformations périphériques de ces pyroxènes en biotite, mais seulement dans des roches dépourvues de calcite.

Une particularité intéressante réside dans la fréquence des cristaux d'olivine (²); mais tandis que dans les roches de ce genre où ce minéral n'est pas rare, ces cristaux sont généralement de petite taille, ici l'olivine peut atteindre $1^{cm}$ de plus grande dimension; elle se présente avec des formes géométriques et il est possible de les dégager de leur gangue. Les formes observées sont : $g^3(120)$, $p(001)$, $e^1(011)$, $e^{\frac{1}{2}}(021)$, $g^1(010)$, avec le développement de formes habituel à l'olivine des basaltes. Ce péridot n'est jamais intact, il est toujours pseudomorphisé et de façon différente, tantôt

(¹) Séance du 11 septembre 1916.

(²) Ces cristaux ont été découverts par M. Duprey et déjà signalés par M. J. Couyat.

en quartz et en calcédoine pénétré de pyrite et entouré de lamelles de biotite, tantôt serpentinisé; il existe aussi des transformations en biotite verdâtres dont la texture cloisonnée permet de reconnaître la structure ancienne de l'olivine en voie d'altération; par contre, je n'ai pas trouvé de pseudomorphoses en trémolite (pilite). Quelquefois ces pseudomorphoses renferment des octaèdres de spinelle brun, qui est probablement d'origine primaire.

Quant au feldspath, il se présente avec des aspects différents. Dans les roches grenues, il constitue de grandes plages xénomorphes qui enveloppent tous les minéraux colorés et l'apatite qui ne manque dans aucun des types de minette.

Dans les variétés microlitiques, qui sont celles dans lesquelles j'ai rencontré l'olivine, l'augite forme des cristaux plus petits que les minettes grenues; le mica se rencontre en phénocristaux et en microlites, l'orthose constitue des microlites aplatis, réunis entre eux par une substance, aujourd'hui transformée en produits micacés, cryptocristallins, qui occupent la place d'un verre disparu.

Enfin, il me faut signaler un type microlitique holocristallin dépourvu de pyroxène, dans lequel l'orthose constitue de très grands microlites palmés, avec çà et là des sphérolites de même nature, plus petits et de cristallisation postérieure.

Je donnerai ci-dessous deux analyses ([1]) : la première (*a*) d'une minette de Fort Regent, par M. Pisani; l'autre (*b*) de Grève au Lançon, par moi-même; j'y joins l'analyse (*c*) d'une minette à augite de Sheep Creek (Little Belt Mountains), Montana, par M. Hillebrand.

| | *a.* | *b.* | *c.* |
|---|---|---|---|
| $SiO^2$ ........ | 48,60 | 56,20 | 52,26 |
| $Al^2O^3$ ....... | 12,40 | 14,20 | 13,96 |
| $Fe^2O^3$ ....... | 1,96 | 0,75 | 2,76 |
| $FeO$......... | 4,54 | 4,92 | 4,45 |
| $MgO$......... | 9,20 | 9,05 | 8,21 |
| $CaO$......... | 3,59 | 4,70 | 7,04 |
| $Na^2O$......... | 1,88 | 2,84 | 2,80 |
| $K^2O$......... | 4,68 | 4,56 | 3,87 |
| $CaCO^2$ ...... | 5,91 | traces | 0,49 |
| $Ph_2O_5$....... | 0,06 | 0,06 | 0,152 |
| $TiO^2$........ | 1,81 | 1,87 | 0,58 |
| Perte au feu.. | 5,31 | 1,70 | 2,87 |
| | 99,94 | 100,85 | 100,25 |

([1]) U.-S. Washington, *Chemical analyses of igneous rocks*, 1903, p. 225.

La roche *a* est assez altérée, l'acide carbonique de la calcite a déplacé une quantité équivalente de silice et la haute perte au feu empêche un calcul précis de la composition virtuelle. Celle de l'analyse *b* conduit à un type de monzonose (II'. 5. 2'. 3) fréquemment réalisé dans les minettes; il est voisin des shoshonoses (II. 5. 3. 3).

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Perturbations de la déclinaison magnétique à Lyon (Saint-Genis-Laval) pendant le premier trimestre de* 1916. Note [1] de **M. Ph. Flajolet**, présentée par M. B. Baillaud.

Les relevés des courbes du déclinomètre Mascart, pendant le premier trimestre de 1916, fournissent la répartition suivante des jours perturbés :

| Échelle. | | Janvier. | Février. | Mars. | Totaux du trimestre. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Jours parfaitement calmes........ | 1 | 2 | 3 | 6 |
| 1 | Perturbations de 1' à 3'....... | 12 | 9 | 2 | 23 |
| 2 | » de 3' à 7'....... | 12 | 8 | 9 | 29 |
| 3 | » de 7' à 15'...... | 5 | 10 | 8 | 23 |
| 4 | » de 15' à 30'...... | 1 | 0 | 8 | 9 |
| 5 | » > 30'............ | 0 | 0 | 1 | 1 |

On remarque qu'il n'y a eu aucun jour de forte perturbation en février; il y a eu un seul jour en janvier (15' le 25); mais en mars, il y en a eu 9 (18' le 25; 19' le 6; 20' les 20, 24 et 30; 22' le 29; 25' les 8 et 10; et enfin 31' le 9).

Par rapport aux résultats du quatrième trimestre de 1915 [2], il y a diminution de deux dans les jours calmes, de quatre dans l'échelle 2, de trois dans l'échelle 4 et de deux dans l'échelle 5; par contre, il y a augmentation de huit jours dans la cote 2 et de deux jours dans la cote 3 de l'échelle.

La séance est levée à 15 heures et demie.

G. D.

---

(1) Séance du 11 septembre 1916.
(2) *Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 519.

## BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

---

OUVRAGES REÇUS DANS LES SÉANCES DE JUIN 1916 (*suite et fin*).

*Annuario publicado pelo Observatorio nacional do Rio de Janiero para o anno de* 1916, anno XXXII. Rio de Janiero, Villas-Boas, 1916; 1 vol. in-12.

*Centuria prima di Acari nuovi*, par ANTONIO BERLESE. Firenze, Ricci, 1916; 1 fasc. in-8°.

*Report of the eighty-fifth meeting of the british Association for the advancement of science : Manchester*, 1915. London, John Murray, 1916; 1 vol. in-8°.

*Records of the Survey of India*, t. VII, *Annuals reports of parties and offices* 1913-1914. Calcutta, Superintendent Government printing, India, 1916; 1 vol. in-f°.

*Publications of the United States naval Observatory*, second series, vol. IX, part II : *Observations made with the nine-inch transit circle* 1903-1908, under the direction of W. S. EICHELBERGER. Washington, Government printing Office, 1915; 1 vol. in-4°.

*Report of the United States commissioner of Fisheries for the fiscal year* 1914, by HUGH M. SMITH. Washington, Government printing Office, 1915; 1 vol. in-8°.

*The american Ephemeris and nautical Almanac, for the year* 1918. Washington, Government printing Office, 1915; 1 vol. in-8°.

*Anthropological report on Sierra Leone*, by NORTHCOTE W. THOMAS; part I : *Law and Custom of the Timne and other tribes;* part II : *Timne-english dictionary;* part III : *Timne grammar and stories.* London, Harrison, 1916; 3 vol. in-12.

*Specimen of languages from Sierra Leone*, by NORTHCOTE W. THOMAS. London, Harrison, 1916; 1 vol. in-4°.